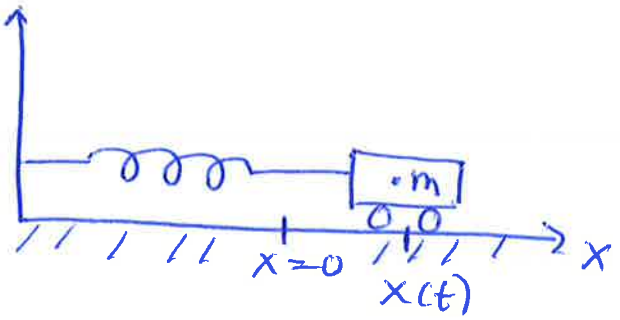
TEMA 16: ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

INTRODUCCIÓN. MOTIVACION

1) Vibraciones en sistemas mecánicos



1.1.) El caso sin rozamiento. El oscilador armónico.

$x(t) \equiv$ posición del CM de m en el tiempo t.

Ley de Hooke $F = -kx$, $k > 0$ es una medida de la rigidez del muelle.

2ª Ley de Newton: $F = m x''$

Modelo matemático

$$\begin{cases} x'' + \frac{k}{m} x = 0 & \text{en } (0, T) \\ x(0) = x_0 & \leftarrow \text{posición inicial} \\ x'(0) = x_1 & \leftarrow \text{velocidad} \ \ \text{"} \end{cases}$$

1.2). Vibraciones amortiguadas. El caso con rozamiento.

$$m x'' = -kx - \underbrace{c x'}_{\text{fuerza de rozamiento}} ;$$

$$\cancel{x'' + \frac{k}{m}} \quad x'' + \frac{c}{m} x' + \frac{k}{m} x = 0$$

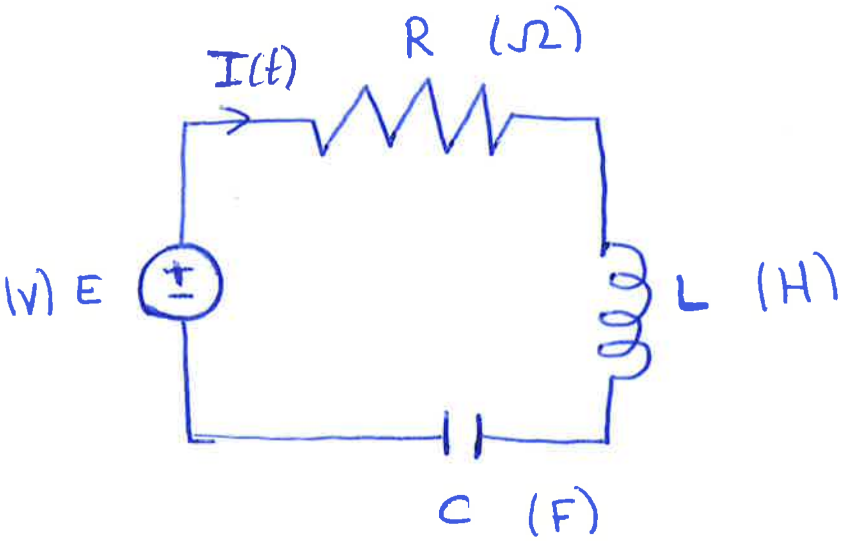
1.3) Vibraciones forzadas.

Suponemos ahora que sobre el sistema actúa una fuerza externa $f(t)$.

El modelo queda entonces:

$$\begin{cases} x'' + \frac{c}{m} x' + \frac{kx}{m} = f(t), \quad 0 < t < T \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = x_1 \end{cases}$$

2) Circuitos eléctricos tipo RLC



Ω ohmios

H henrios

F Faradios

V voltios.

$I(t) \equiv$ corriente eléctrica

- Ley de Ohm: $E_R = RI$ se opone al paso de la corriente
- Bobina: $E_L = L \frac{dI}{dt}$ " " " " "
- Capacitador: (Condensador) $E_C = \frac{1}{C} Q$ almacena una carga Q

La intensidad de corriente $I(t)$ se define como la rapidez de flujo de la carga, es decir,

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- Ley de kirchhoff:

$$E - E_R - E_L - E_C = 0;$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E$$

y derivando respecto a t:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$$

Corriente continua: $E(t) = E_0 \equiv cte$

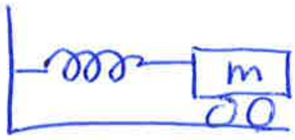
" alterna: $E(t) = E_0\cos(\omega t)$, $\omega \equiv$ frecuencia

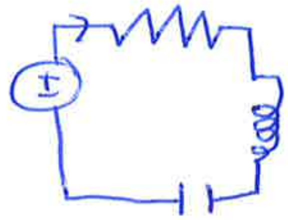
Modelo Matemático:

$$\begin{cases} L\dfrac{d^2I}{dt^2} + R\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C}I = \dfrac{dE}{dt} \\ I(0) = I_0 \\ \dfrac{dI}{dt}(0) = I_1 \end{cases}$$

Problema de valores iniciales para una EDO de 2º orden

· Analogía entre sistemas mecánicos y eléctricos





$x(t) \equiv$ posición

$I(t) \equiv$ intensidad de corriente

$$m x'' + c x' + k x = f(t) \qquad L I'' + R I' + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt}$$

masa $m \longleftrightarrow$ inductancia L

viscosidad $c \longleftrightarrow$ resistencia R

rigidez del muelle $k \longleftrightarrow \frac{1}{C}$, $C \equiv$ capacitancia

fuerza externa $f(t) \longleftrightarrow \frac{dE}{dt}$, $E \equiv$ fuerza electromotriz

La ecuación de los circuitos también se puede escribir en términos de la carga Q ya que $I = \frac{dQ}{dt}$; Por tanto,

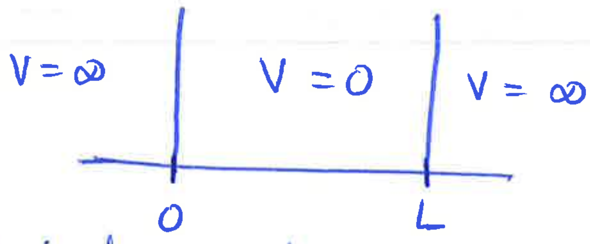
$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

En este sentido: desplazamiento $x(t) \equiv$ carga $Q(t)$

fuerza externa $f(t) \equiv$ fuerza electromotriz $E(t)$.

Nota.- Usamos un <u>único</u> objeto matemático para representar la física de un sistema mecánico y también de un circuito eléctrico RLC: una ecuación diferencial ordinaria de 2º orden con coeficientes constantes.

3) Movimiento de un electrón en una caja unidimensional



El electrón está obligado a moverse en la región $(0, L)$ donde se ~~f~~ mueve libremente pues su energía potencial es nula en esa región.

Erwin Schrödinger postuló la ecuación diferencial que ha de satisfacer la "función de onda" del electrón y que en este caso es:

$$(*) \quad \begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\,\psi(x) & , 0 < x < L \\ \psi(0) = \psi(L) = 0 \end{cases}$$

donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $h \equiv$ cte de Planck

$E \equiv$ energía cinética del electrón

$\psi = \psi(x) \equiv$ función de onda que nos proporciona la probabilidad de que el electrón se encuentre en la región (a, b) por medio de

$$\cancel{P} \; P = \int_a^b \psi^2(x)\,dx .$$

La ecuación de Schrödinger anterior es coherente con ~~el postulado~~ los postulados de De-Brouglie-Einstein sobre la dualidad onda-corpúsculo:

$\lambda = \dfrac{h}{p}$; $\nu = \dfrac{E}{h}$, $\lambda \equiv$ longitud de onda
$\nu =$ frecuencia de la onda.

Matemáticamente, el problema (*) es un problema de valor "frontera" (o de "contorno") para una EDO de 2º orden con coeficientes constantes.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE EDO de 2º ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = r(x).$$

1º) Se resuelve la ecuación homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0.$$

Para ello se considera el polinomio característico de la ecuación:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

del cual se calculan sus raíces. Posibles casos:

(i) Las raíces son reales y distintas. En este caso, la solución de la EDO homogénea es

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

donde λ_1, λ_2 son las raíces de $P(\lambda) = 0$ y c_1, c_2 son dos constantes de integración

(ii) Hay una raíz real doble. En ese caso, la solución es

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

donde λ es la raíz del polinomio característico.

(iii) Las soluciones de $P(\lambda)=0$ son complejas, es decir,

$$\lambda_{1,2} = m_1 \pm i m_2$$

En este caso, la solución general de la EDO homogénea es

$$y(x) = e^{m_1 x}\left(c_1 \cos(m_2 x) + c_2 \operatorname{sen}(m_2 x)\right)$$

Ejemplo 1:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0;$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0;$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2. \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0;$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2 \text{ raíz doble.}$$

Solución general:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

Ejemplo 3:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 1+i \\ 1-i \end{cases}$$

Solución general:

$$y(x) = e^{x}\left(c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x)\right)$$

2º) Solución de la ecuación completa

$$y'' + ay' + by = r(x).$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

donde $y_h(x) \equiv$ solución de la ecuación homogénea

$y_p(x) \equiv$ " particular de la ecuación completa.

Cálculo de $y_p(x)$ por el método de los coeficientes indeterminados:

Este método se aplica para el caso en que $r(x)$ tiene una de las formas siguientes:

$r(x)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $y_p(x)$

~~1) $r = c e^{ax}$~~ $\qquad$ ~~y_p~~

1º) $r(x) = c e^{\alpha x} \longrightarrow y_p(x) = k e^{\alpha x}$

2º) $r(x) = c x^n \longrightarrow y_p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

3º) $r(x) = c \cos(\omega x)$ ó $r(x) = c\, \mathrm{sen}(\omega x) \longrightarrow y_p(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2\, \mathrm{sen}(\omega x)$.

4º) $r(x) = c e^{\alpha x} \cos(\omega x)$ ó $r(x) = c e^{\alpha x}\, \mathrm{sen}(\omega x) \longrightarrow y_p(x) = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\omega x) + c_2\, \mathrm{sen}(\omega x) \right)$

El método consiste en sustituir $y_p(x)$ en la EDO completa e igualar coeficientes para calcular los coeficientes indeterminados de $y_p(x)$. Si $y_p(x)$ es solución de la ecuación homogénea, entonces $y_p(x)$ se multiplica por x en el caso de que las raíces sean reales y distintas, y por x^2 en el caso de raíz doble.

Veamos varios ejemplos

Ejemplo 1: $y'' + 3y' + 2y = 2x^2$

1º) Ecuación homogénea

$$y_h'' + 3y_h' + 2y_h = 0;$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0;$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{2} = -1 \\ \frac{-3-1}{2} = -2. \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

2º) Solución particular : $y_p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Derivando y sustituyendo en la ecuación completa:

$$y_p' = a_1 + 2a_2 x$$

$$y_p'' = 2a_2 \longrightarrow$$

$\cancel{y_{p2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$

Por tanto:

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2a_2 + 3a_1 + 6a_2 x + 2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2$$

$$= 2a_2 + 3a_1 + 2a_0$$
$$+ (6a_2 + 2a_1) x$$
$$+ 2a_2 x^2$$
$$= 2x^2;$$

$$2a_2 + 3a_1 + 2a_0 = 0$$
$$\left.\begin{array}{ll} 6a_2 + 2a_1 = 0 & \rightarrow a_1 = -\frac{6a_2}{2} = -3 \\ 2a_2 = 2 & \rightarrow a_2 = 1 \end{array}\right.$$

$$2a_0 = -2a_2 - 3a_1 = -2 + 9 = 7 \rightarrow a_0 = \frac{7}{2}$$

$$y_p(x) = \frac{7}{2} - 3x + x^2.$$

Solución general de la ecuación completa

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{7}{2} - 3x + x^2}$$

Ejemplo 2 $\quad y'' + 3y' + 2y = 3e^{-2x}$

1º) Solución de la ec. homogénea

$$y_h'' + 3y_h' + 2y_h = 0 \rightarrow y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

2º) Solución ~~de la ec. ec~~ particular: $y_p(x) = k e^{-2x}$

$$y_p' = -2k e^{-2x} \; ; \; y_p'' = 4k e^{-2x}$$

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 4k e^{-2x} - 6k e^{-2x} + 2k e^{-2x} = 3e^{-2x};$$

$$(\underbrace{4k - 6k + 2k}_{0}) e^{-2x} = 3e^{-2x} \quad \text{NO}.$$

Probamos con $y_p(x) = k x e^{-2x}$

$$y_p' = k e^{-2x} - 2kx e^{-2x}$$

$$y_p'' = -2k e^{-2x} - 2k e^{-2x} + 4kx e^{-2x}$$

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = -4k e^{-2x} + 4kx e^{-2x}$$

$$+ 3k e^{-2x} - 6kx e^{-2x}$$

$$+ 2kx e^{-2x}$$

$$= 3 e^{-2x};$$

Dividiendo por e^{-2x};

$$-4k + 3k + 4\cancel{k}x - 6\cancel{k}x + 2\cancel{k}x = 3$$

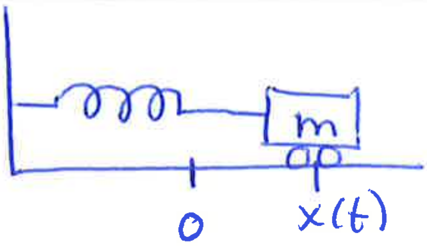
$$-k = 3 \rightarrow k = -3$$

$$y_p(x) = -3x e^{-2x};$$

Solución general:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - 3x e^{-2x}$$

ESTUDIO DEL OSCILADOR ARMÓNICO



$x(t) \equiv$ posición del centro de masas de m en el instante t

m = masa

x_0 = posición en el tiempo $t=0$

$k>0 \equiv$ rigidez del muelle en N/m.

Caso 1: Sin rozamiento

Modelo Matemático

$$(1)\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0 & \text{en } (0,T) \\ x(0) = x_0 & \text{posición inicial} \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 0 & \text{velocidad inicial} \end{cases}$$

Polinomio característico: $P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0;$

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Por tanto,

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right).$$

Imponemos las condiciones iniciales:

$$x_0 = x(0) = c_1 \; ; \qquad \frac{dx}{dt} = -c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right) + c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right)$$

$$0 = \frac{dx}{dt}(0) = c_2\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow c_2 = 0.$$

Solución: $\boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right)}$

Magnitudes físicas de interés asociadas a

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right).$$

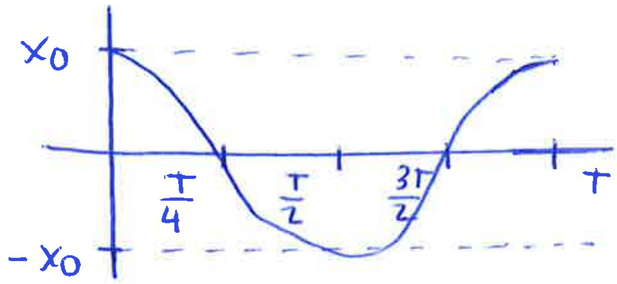
- amplitud de la oscilación: x_0

- ~~Den~~ Periodo de oscilación: denotando $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, entonces

$$w_0 T = 2\pi \Longleftrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ segundos}}$$

- Frecuencia de oscilación: nº de periodos por unidad de tiempo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{w_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi}$$ se mide en Hertzios (Hz) en el S.I.



Movimiento armónico simple.

<u>Otra forma de resolver el problema haciendo uso de números (o funciones) complejas</u>

Buscamos una solución del problema (1) que se pueda escribir en la forma

$$y(t) = y_1(t) + i\, y_2(t),$$

y exigimos que $y(t)$, por tanto $y_1(t)$ e $y_2(t)$, sean soluciones, de modo que, al final, la solución buscada es $y_1(t)$.

Escribimos $y(t) = \tilde{A}\, e^{i\omega t}$, con $\omega \in \mathbb{R}$ y $\tilde{A} \in \mathbb{C}$.

De esta forma, la solución buscada es

$$x(t) = \mathrm{Re}\,(\tilde{A}\, e^{i\omega t}).$$

~~Sustit~~

Derivando y sustituyendo en la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x = 0$$

tenemos:

$$-\omega^2 \tilde{A}\, e^{i\omega t} + \omega_0^2 \tilde{A}\, e^{i\omega t} = 0$$

y dividiendo por $e^{i\omega t}$:

$$-\omega^2 \tilde{A} + \omega_0^2 \tilde{A} = 0.$$

Por tanto, $\tilde{A} = 0$ (NO) ó bien $\omega^2 = \omega_0$; $\omega = \omega_0$.

Como $\tilde{A} \in \mathbb{C}$, $\tilde{A} = A e^{i\phi}$, con $A = |\tilde{A}|$.

Así,
$$x(t) = \mathrm{Re}\,(\tilde{A}\, e^{i\omega_0 t}) = \mathrm{Re}\,(A e^{i\phi} e^{i\omega_0 t})$$
$$= A \cos(\omega_0 t + \phi).$$

$A = |\tilde{A}|$ es la amplitud de la solución

$\phi = \arg \tilde{A}$ es la fase (inicial)

$\tilde{A}$ se llama amplitud compleja ó fasor.

Imponiendo las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x(0) = A\cos\phi \\ 0 = x'(0) = -A\omega_0 \operatorname{sen}\phi \end{array}\right\} \to \phi = 0 \to A = x_0.$$

Solución: $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

Caso 2: Rozamiento

$$m x'' + b x' + k x = 0 \quad , \; t > 0$$

Dividiendo por m:

$$x'' + \frac{b}{m} x' + \frac{k}{m} x = 0.$$

Uso de funciones complejas para resolver esta E.D.O.

Buscamos una solución en la forma

$$x(t) = \operatorname{Re} y(t), \quad \text{con } y(t) = \tilde{A} e^{\gamma t}, \quad \tilde{A} \in \mathbb{C}, \; \gamma \in \mathbb{C}.$$

Derivando y sustituyendo en la EDO:

$$y'(t) = \tilde{A}\gamma e^{\gamma t}, \quad y''(t) = \tilde{A}\gamma^2 e^{\gamma t},$$

$$\gamma^2 \tilde{A} e^{\gamma t} + \frac{b}{m}\gamma \tilde{A} e^{\gamma t} + \frac{k}{m}\tilde{A} e^{\gamma t} = 0 \iff$$

$$\left(\gamma^2 + \frac{b}{m}\gamma + \frac{k}{m}\right)\tilde{A} e^{\gamma t} = 0 < \begin{array}{l} \tilde{A} = 0 \text{ NO} \\ \gamma^2 + \frac{b}{m}\gamma + \frac{k}{m} = 0; \end{array}$$

$$\gamma = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

Notación: denotamos $\alpha = \frac{b}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Entonces, $\gamma = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$.

<u>Posibles casos:</u>

(a) $\alpha > \omega_0$ (overdamped). El rozamiento es grande en comparación con la rigidez del muelle.

Sean $\gamma_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$

$\gamma_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$

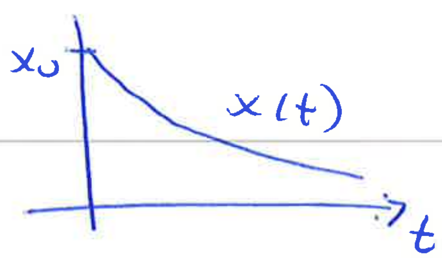
Solución $x(t) = c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t}$

Imponemos las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} x_0 = x(0) &= c_1 + c_2 \\ 0 = x'(0) &= c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad c_1 = -x_0 \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad c_2 = x_0 \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{\gamma_1 - \gamma_2}\left(-\gamma_2 e^{\gamma_1 t} + \gamma_1 e^{\gamma_2 t}\right)$$

El sistema recupera su posición de equilibrio de manera exponencial



~~Caso~~ (b) $\alpha = \omega_0$, $\gamma = -\alpha$ raíz doble.

$$x(t) = \mathrm{Re}(\tilde{A}\, e^{\gamma t}) = A\cos\phi\, e^{-\alpha t}$$

$$\tilde{A} = A e^{i\phi}$$

Sólo hay un parámetro libre $A\cos\phi$.

Sustituyendo en la EDO es inmediato comprobar que $x(t) = \mathrm{Re}(\tilde{A}\, t\, e^{\gamma t})$

también es solución si $\gamma = -\alpha$. Por tanto, la solución general es

$$x(t) = (B + ct)\, e^{-\alpha t}$$

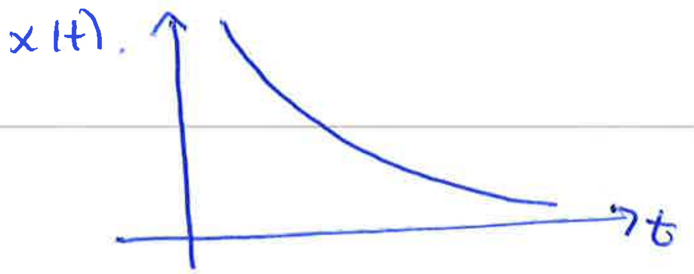
Imponiendo las condiciones iniciales

$$x_0 = x(0) = B$$

$$x'(t) = c\, e^{-\alpha t} + (B + ct)(-\alpha)\, e^{-\alpha t}$$

$$0 = x'(0) = c + B(-\alpha) \to c = \alpha B = \alpha x_0 .$$

$$\boxed{x(t) = x_0(1 + \alpha t)\, e^{-\alpha t}}$$



(c) $\alpha < \omega_0$: $\quad \gamma = -\alpha \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}_{\omega_\alpha} = -\alpha \pm i \omega_\alpha$

$$x(t) = \mathrm{Re}(\tilde{A} e^{\gamma t})$$

$$= \mathrm{Re}(A e^{i\phi} e^{(-\alpha \pm i\omega_\alpha)t})$$

$$\cancel{= A\cos\phi}$$

$$= e^{-\alpha t}(B\cos(\omega_\alpha t) + C\,\mathrm{sen}(\omega_\alpha t))$$

Imponiendo las condiciones iniciales:

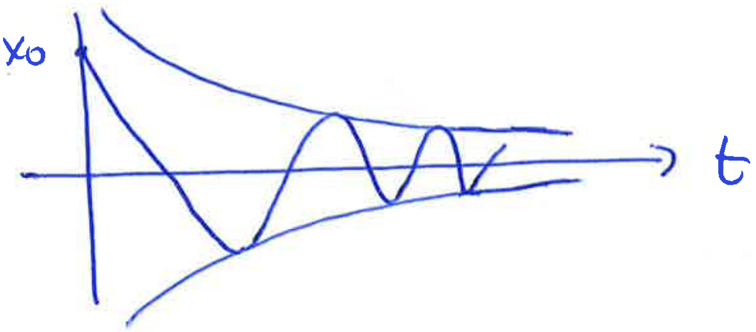
$$x_0 = x(0) = B$$

$$x'(t) = -\alpha e^{-\alpha t}(\quad) + e^{-\alpha t}(-B\omega_\alpha \mathrm{sen}(\omega_\alpha t) + C\omega_\alpha \cos(\omega_\alpha t))$$

$$0 = x'(0) = -\alpha B + C\omega_\alpha$$

$$= -\alpha x_0 + C\omega_\alpha \; ; \quad C = \frac{\alpha x_0}{\omega_\alpha}$$

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(x_0 \cos(\omega_\alpha t) + \frac{\alpha x_0}{\omega_\alpha} \mathrm{sen}(\omega_\alpha t)\right)$$



Estudio de la energía del sistema

$$m x'' + b x' + k x \cancel{m} = 0.$$

Multiplicando por x' se tiene

$$m x'' x' + b (x')^2 + k\, x \cdot x' = 0;$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(m (x')^2 + k x^2 \right) + b (x')^2 = 0; \qquad (*)$$

El término

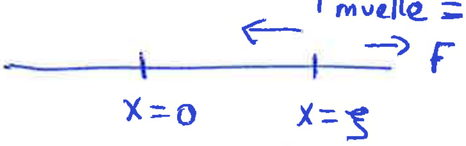
$$E(t) = \frac{1}{2} m |x'|^2 + k x^2$$

es la energía mecánica total del sistema.

$\frac{1}{2} m |x'|^2 \equiv$ energía cinética

$\frac{1}{2} k x^2 \equiv$ " potencial elástica.

$F_{muelle} = -k\xi \;\rightarrow\; F = k\xi$



Si se produce un pequeño desplazamiento $d\xi$ el trabajo ejercido por la fuerza F es $W = \underbrace{k\xi}_{\text{fuerza}} \; \underbrace{d\xi}_{\text{desplazamiento}}$

Así, el trabajo total es

$$W = \int_0^x k\xi \, d\xi = \frac{1}{2} k x^2.$$

Integrando en (*) en [0, T]:

$$E(t) - E(0) = \int_0^t b\,|x'(s)|^2\,ds$$

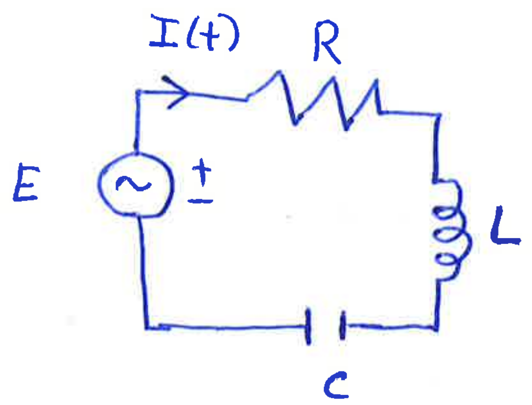
Por tanto, si no hay rozamiento $b \equiv 0$, la energía se conserva: $E(t) = E(0)\ \forall\, t \geq 0$.

Si hay rozamiento,

$$\frac{d}{dt} E(t) = -b\,|x'(t)|^2 \leq 0,$$

el sistema es disipativo, la energía disminuye con t.

CIRCUITOS ELÉCTRICOS TIPO RLC



$I(t)$ = intensidad de corriente

$Q(t)$ = carga

$I = \dfrac{dQ}{dt}$

$R \equiv$ resistencia

L = inductancia

C = condensador

$E(t) = E_{max} \cos(\omega t) \equiv$ corriente alterna

Modelo Matemático

$$\begin{cases} L\dfrac{d^2 I}{dt^2} + R\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C} I = \overbrace{-E_{max}\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)}^{\frac{dE}{dt}} \\ I(0) = I_0 \equiv \text{intensidad inicial en el circuito} \\ Q(0) = Q_0 \equiv \text{carga inicial en el condensador} \end{cases}$$

} magnitudes medibles físicamente.

Como $L\dfrac{dI}{dt} + RI + \dfrac{1}{C} Q = E$, particularizando en $t=0$ se tiene:

$$\frac{dI}{dt}(0) = \frac{1}{L}\left(-R\,I(0) - \frac{1}{C}\,Q(0) + E(0)\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(-R\,I_0 + \frac{1}{C}\,Q_0 + E_{max}\right).$$

Estudio de la energía del sistema

Escribiendo la EDO en la forma

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I + \frac{1}{C}\left(\int_0^t I(s)\,ds + Q(0)\right) = E(t)$$

y multiplicando por $I(t)$ se tiene:

$$L\,I(t)\,\frac{dI}{dt} + R\,I^2 + \frac{I(t)}{C}\left(\int_0^t I(s)\,ds + Q(0)\right) = E(t)\,I(t)$$

es decir,

$$\frac{L}{2}\,\frac{d}{dt}\,I^2(t) + R\,I^2(t) + \frac{1}{2C}\,\frac{d}{dt}\left(\int_0^t I(s)\,ds + Q(0)\right)^2 = E(t)\,I(t)$$

e integrando en $(0,t)$:

$$\frac{L}{2}\,I^2(t) + R\int_0^t I^2(s)\,ds + \frac{1}{2C}\left(Q(0) + \int_0^t I(s)\,ds\right)^2 =$$

$$= \frac{L}{2}\,I^2(0) + \frac{1}{2C}\,(Q(0))^2 + \int_0^t E(s)\,I(s)\,ds.$$

$\frac{L}{2}\,I^2(t) \equiv$ energía magnética almacenada en la bobina

$\frac{1}{2C}\left(Q(0) + \int_0^t I(s)\,ds\right) \equiv$ energía electrostática almacenada en el condensador

$R\int_0^t I^2(s)\,ds \equiv$ energía electromagnética disipada en forma de calor (Ley de Joule).

Finalmente,

$$\int_0^t E(s)I(s)ds \equiv \text{energía suministrada al circuito por la fuente de voltage } E.$$

Uso de funciones complejas

Supongamos que $E(t) = \mathrm{Re}(\tilde{E}e^{i\omega t})$, $\tilde{E} \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Escribiendo $\tilde{E}$ en forma exponencial,

$$\tilde{E} = E\, e^{i\alpha}$$

entonces $\quad E(t) = \mathrm{Re}\left(E e^{i(\alpha+\omega t)}\right) = E\cos(\omega t+\alpha).$

Buscamos una solución de la EDO de la misma forma,

$$I(t) = \mathrm{Re}(\tilde{I}e^{i\omega t}) \quad , \tilde{I} \in \mathbb{C}.$$

Derivando y sustituyendo en la EDO:

$$\frac{d}{dt}(\tilde{I}e^{i\omega t}) = i\omega\tilde{I}e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\tilde{I}e^{i\omega t}) = -\omega^2\tilde{I}e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 L\tilde{I}e^{i\omega t} + i\omega R\tilde{I}e^{i\omega t} + \frac{1}{C}\tilde{I}e^{i\omega t} = i\omega\tilde{E}e^{i\omega t}$$

y multiplicando por $i\omega^{-1}e^{-i\omega t}$:

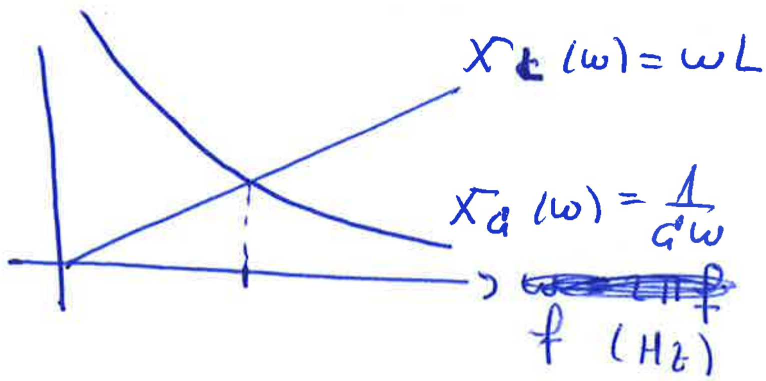
$$-\tilde{E} = -\omega L\tilde{I} - R\tilde{I} + \frac{1}{C\omega}i\tilde{I}.$$

Dividiendo por $-\tilde{I}$:

$$\frac{\tilde{E}}{\tilde{I}} = R + \left(\omega L - \frac{1}{C\omega} \right) i$$ ≡ impedancia compleja del circuito

La impedancia es una medida de la oposición que exibe el circuito al paso de la corriente cuando se le aplica un voltaje.

$$X(\omega) = \underbrace{\omega L}_{\text{reactancia inductiva}} - \underbrace{\frac{1}{C\omega}}_{\text{reactancia capacitiva}}$$ ≡ reactancia



$\omega = 2\pi f$

$$X_C(\omega) = X_L(\omega) \Leftrightarrow \omega L = \frac{1}{C\omega};$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

≡ frecuencia de resonancia del circuito

Solución general de la EDO:

$$\psi(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \operatorname{sen}(\omega x).$$

Imponemos las condiciones de contorno:

$$0 = \psi(0) = c_1$$

$$0 = \psi(L) = c_2 \operatorname{sen}(\omega L) < \begin{array}{l} c_2 = 0 \text{ (NO)} \rightarrow \psi \equiv 0 \\ \operatorname{sen}(\omega L) = 0 \iff \end{array}$$

$$\omega L = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\omega = \frac{n\pi}{L};$$

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{n\pi}{L};$$

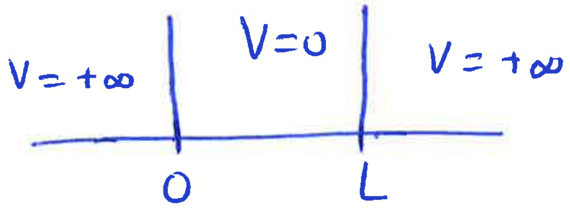
$$\boxed{\begin{array}{l} E = E_n = \frac{1}{2m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2 \equiv \text{autovalores} \\ \\ \psi_n(x) = c_2 \operatorname{sen}(\omega_n x) \equiv \text{autofunciones} \end{array}}$$

Este sistema cuántico sólo es posible cuando la energía de la partícula cuántica toma los valores discretos $E_n = \frac{1}{2m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2$

Este fenómeno se conoce con el nombre de "cuantización" de la energía en Mecánica Cuántica.

PROBLEMAS DE AUTOVALORES PARA EDO DE ORDEN 2

Movimiento de un electrón en una caja unidimensional



$$\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\,\psi(x) \\ \psi(0) = \psi(L) = 0 \end{cases}$$

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, $h \equiv$ cte de Planck

$E > 0$ $\equiv$ energía cinética de la partícula cuántica

$\psi = \psi(x) \equiv$ función de onda.

El problema del cálculo de los autovalores (espectro) del sistema anterior consiste en encontrar los valores de E, llamados autovalores, para los que el sistema tiene una solución no nula (autovectores).

Polinomio característico de la EDO:

$$P(\lambda) = -\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 = E\,;$$

$$\lambda^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0 \iff$$

$$\lambda = \pm i\,\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \pm i\omega\,, \quad \omega = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Finalmente, como $\psi_n(x)$ son funciones de onda:

$$1 = \int_0^L \psi_n^2(x)\,dx = c_n^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L}\,dx = c_n^2 \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow c_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}}$$